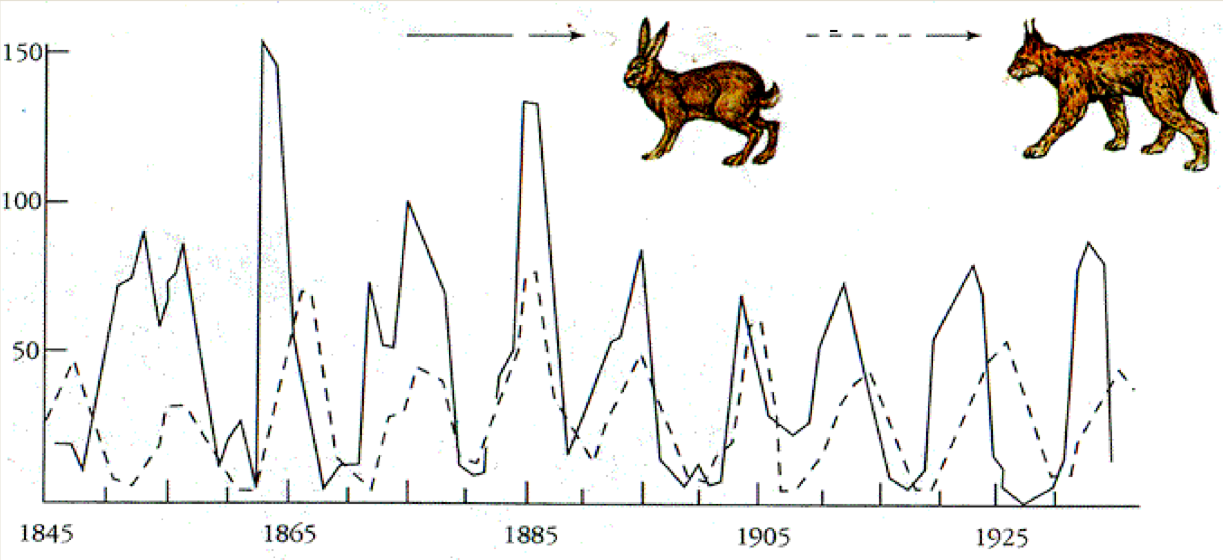
Динаміка чисельності популяції

Математичні моделі

- ✓ Модель Мальтуса
- ✓ Модель Ферхюльста
- ✓ Модель Лотки-Вальтерра.



Основні припущення в математичних моделях динаміки популяцій

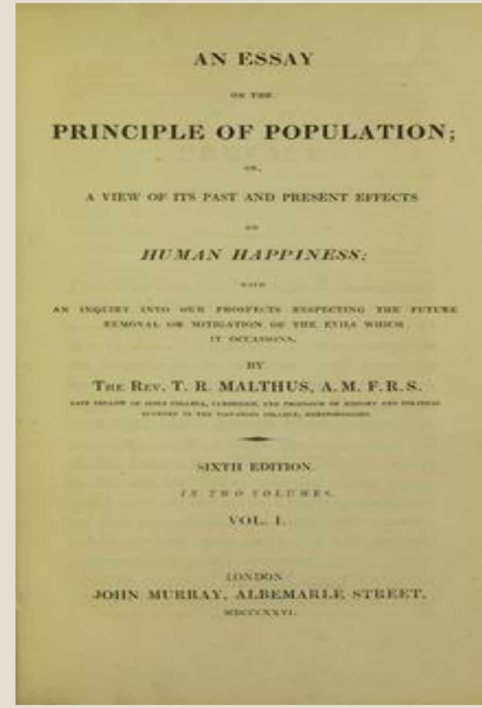
•Сталість зовнішніх умов у часі

•Однорідність середовища у просторі (локальні системи, точкові моделі)

•Динаміка чисельності популяції у точкових моделях визначається процесами народження та смерті. Показники народжуваності та смертності - узагальнені параметри та характеризують взаємодію популяції із середовищем проживання.

•Генетична однорідність популяції. Вікова та статева структура популяції не враховується.

•Для ізольованої популяції швидкість зміни чисельності за період t залежить від локальних значень чисельності на даний час t.



AN ESSAY

ON THE

PRINCIPLE OF POPULATION;

OR,

A VIEW OF ITS PAST AND PRESENT EFFECTS

ON

HUMAN HAPPINESS;

WITH

AN INQUIRY INTO OUR PROSPECTS RESPECTING THE FUTURE REMOVAL OR MITIGATION OF THE EVILS WHICH IT OCCASIONS.

BY

THE REV. T. R. MALTHUS, A.M. F.R.S.

[illegible]

SIXTH EDITION.

IN TWO VOLUMES.

VOL. I.

LONDON:

JOHN MURRAY, ALBEMARLE STREET.

MDCCCXXVI.

То́мас Ма́льтус (1766—1834) - англійський священик, вчений, демограф, економіст.

«Досвід про закон народонаселення» (1798): в людському суспільстві, як і у всій живій природі, існує абсолютний закон безмежного розмноження особин. При цьому зростання населення Землі йде в геометричній прогресії, тоді як засоби існування збільшуються лише в арифметичній.

Модель Т.Мальтуса

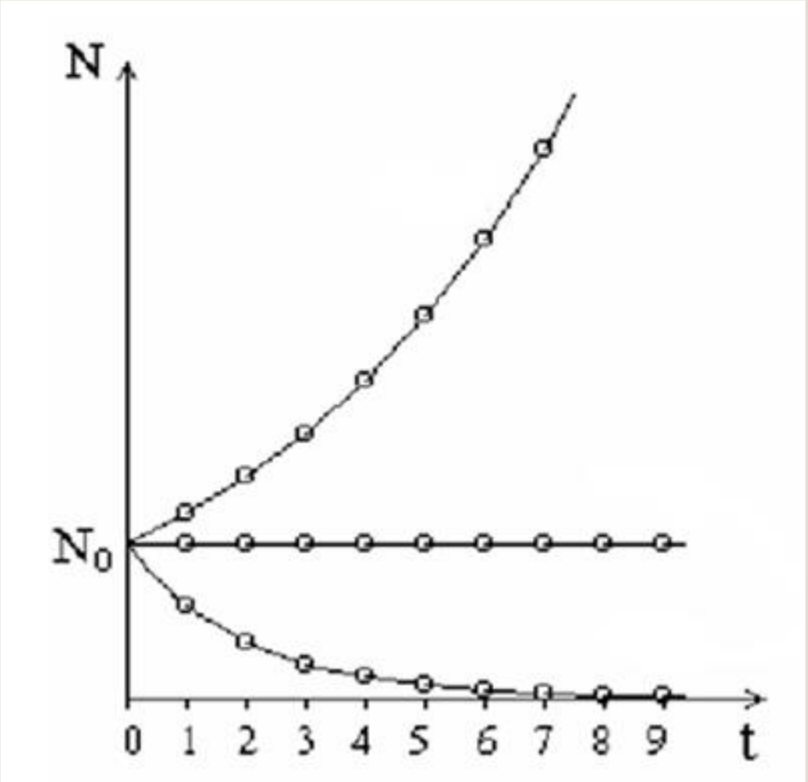
N(t) – чисельність популяції в момент часу t

N(t) - чисельність популяції в момент часу t=0

Швидкість приросту популяції $$\frac{dN}{dt} = r \cdot N$$

r – біотичний потенціал

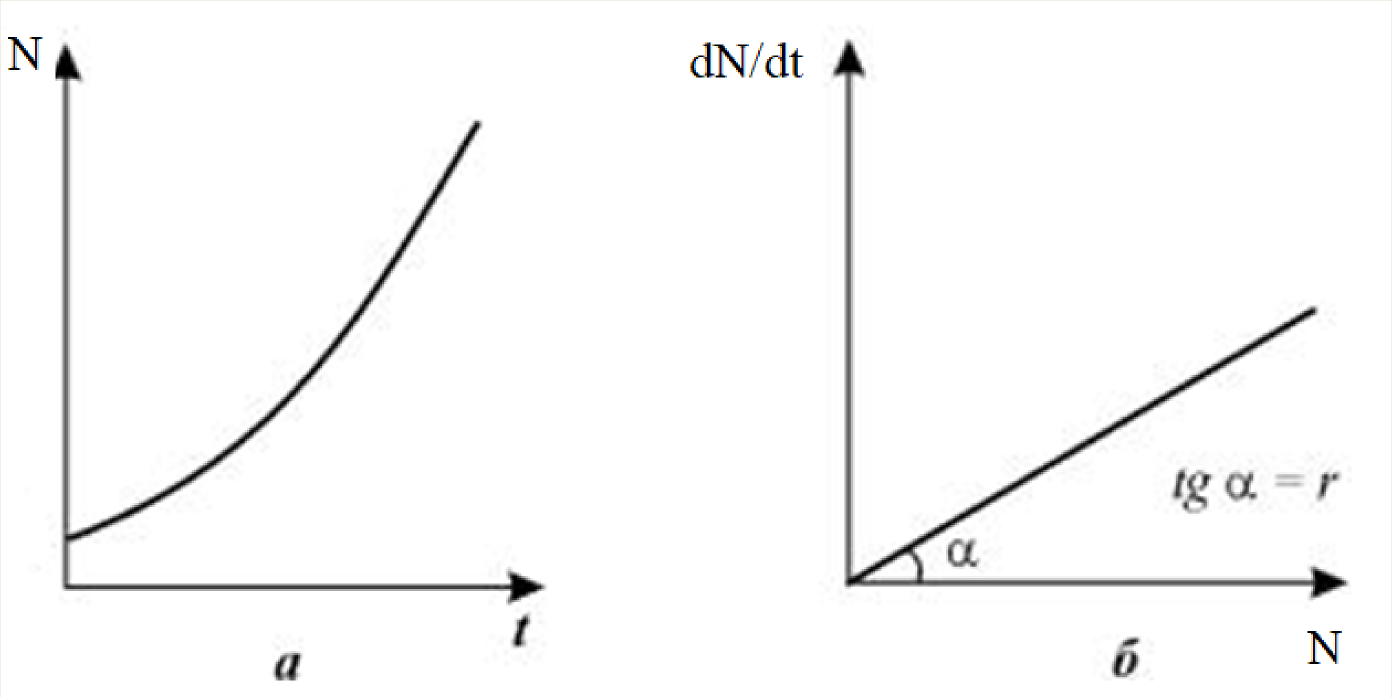
$N(t) = N(0) \cdot \exp(r \cdot (t - t_0))$



Модель необмеженого зростання популяції

$$\frac{dN}{dt} = N_0 \cdot r$$

$$N(t) = N_o \cdot e^{r \cdot t}$$



Залежність чисельності від часу (а) та швидкості зростання від чисельності (б)

Модель обмеженого зростання
(з урахуванням ресурсів середовища)

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{\ln N}{\ln K}\right)$$

Модель Б. Гомпертца (1825)

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Модель Ферхюльста-Пірла

Ємність середовища

Модель обмеженого зростання з урахуванням ефекту Оллі

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right) \cdot (N - l)$$

$$0 < l < K$$

Кожен вид характеризується своїм мінімальним та максимальним специфічним розміром популяції, при мінімумі виникає загроза зникнення популяції (виду в цілому), а при певних сприятливих умовах населення досягає стану перенаселення, що також супроводжується обмеженням подальшого зростання чисельності популяції. (Уордер Оллі, 1931 г.)

l - критична нижня границя чисельності популяції

К – верхня границя чисельності популяції

Модель популяційного спалаху комах

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right) - p(N)$$

p(N) – описує знищення комах хижаками

Модель справедлива для невеликих проміжків часу, які можна порівняти з тривалістю популяційного спалаху.

Модель впливу ліків на заражені вірусом клітини

$$\frac{dm}{dt} = r \cdot m \cdot \left(1 - \frac{m}{k}\right) - \gamma \cdot m \cdot f(h)$$

m – кількість заражених клітин

f(h) – функція терапії, яка залежить від параметра *h*, що характеризує ефективність лікарського впливу

r, *k*, *γ* – позитивні коефіцієнти

Логістичне рівняння Ферхюльста

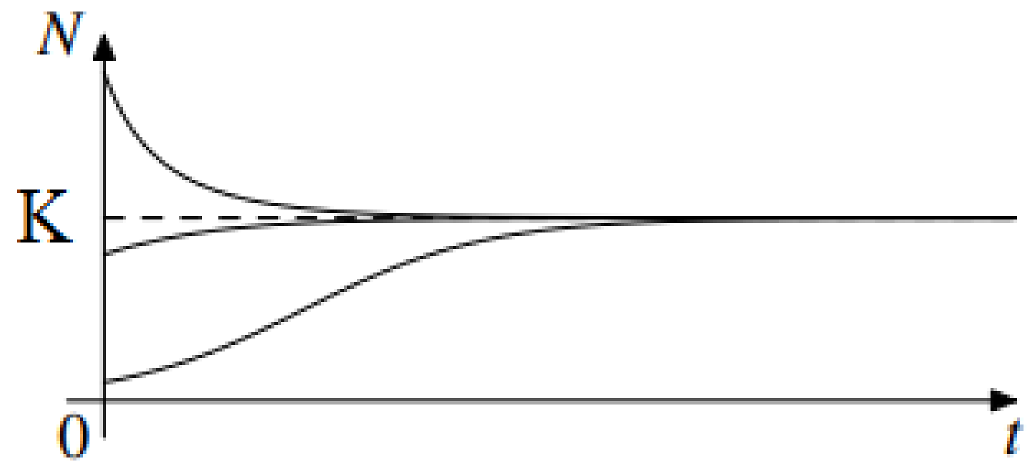
Припущення: питома швидкість зростання популяції лінійно зменшується зі зростанням чисельності; існує гранична чисельність популяції (*K*) при досягненні якої поява нових особин можливо лише при умові загибелі наявних особин.

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{x} = r - \frac{r}{K}\cdot x$$

$$\frac{dx}{dt} = x\cdot r - \frac{r}{K}\cdot x^2$$

внутрішньовидова конкуренція

необмежене зростання



Динаміка популяції в моделі Ферхюльста

Аналітичне рішення рівняння Ферхюльста

$$x(t) = \frac{x_0 \cdot K \cdot \exp(r \cdot t)}{K - x_0 + x_0 \cdot \exp(r \cdot t)}$$

Модель конкуренції популяцій

Модель міжвидової конкуренції популяцій за загальний ресурс

$$\frac{dN}{dt} = r_1 \cdot N \cdot \frac{K_1 - N - \alpha_1 M}{K_1} \qquad N_{t+1} = r_1 \cdot N_t \cdot \frac{K_1 - N_t - \alpha_1 M_t}{K_1} + N_t$$

$$\frac{dM}{dt} = r_2 \cdot M \cdot \frac{K_2 - M - \alpha_2 \cdot N}{K_2} \qquad M_{t+1} = r_2 \cdot M_t \cdot \frac{K_2 - M_t - \alpha_2 \cdot N_t}{K_2} + M_t$$

Коефіцієнт боротьби за існування особин N та M виду

Ємність середовища для особин N та M виду

Результат конкуренції

При $\boldsymbol{\alpha_1 < K_1/K_2}$ і $\boldsymbol{\alpha_2 > K_2/K_1}$ - виживає лише вид N

При $\boldsymbol{\alpha_1 > K_1/K_2}$ і $\boldsymbol{\alpha_2 < K_2/K_1}$ - виживає лише вид M

При $\boldsymbol{\alpha_1 > K_1/K_2}$ і $\boldsymbol{\alpha_2 > K_2/K_1}$ - виживає тільки один із видів, який має більший коефіцієнт r (біотичний потенціал)

При $\boldsymbol{\alpha_1 < K_1/K_2}$ і $\boldsymbol{\alpha_2 < K_2/K_1}$ - виживає обидва види

Приклади

Рослини: *перехоплення мінеральних солей та вологи кореневою системою, сонячного світла – листям.*

У змішаних посівах трав перевагу набувають види з довшими листовими черешками.

У змішаних посадках дерев екземпляри, що швидко ростуть, затінюватимуть і пригнічуватимуть повільно зростаючі дерева.

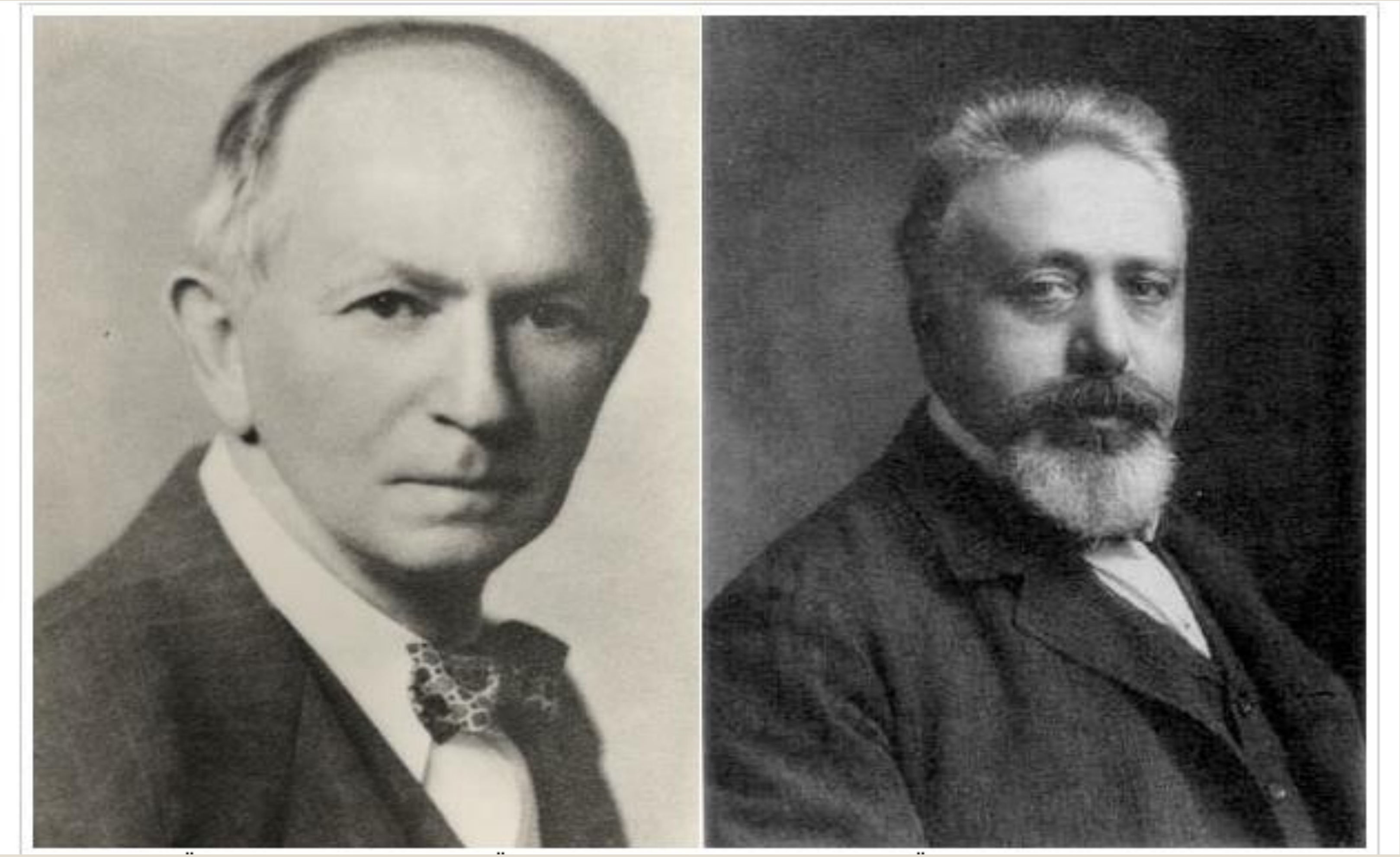
Гриби перешкоджають зростанню бактерій шляхом вироблення антибіотиків

Тварини:

Зебри обривають верхівки трав; антилопи годуються тим, що залишають їм зебри; газелі вищипують найнижчі трави, а антилопи їдять сухі стебла, що залишилися після інших травоїдних.

У результаті конкуренції в біогеоценозі спільно вживаються лише ті види, які змогли розійтися у своїх вимогах до умов життя.

Модель Лотки-Вальтерра



Альфред Джеймс Лотка
(A.J. Lotka)
1880-1949

Віто Вольтерра
(V. Volterra)
1860-1940

Модель Лотки-Вальтерра

Математична модель спільного існування двох біологічних видів (популяцій) на кшталт «хижак – жертва».

Стаціонарна система (карась - щука)

C - кількість щук,

N - кількість карасів.

(x, y) – стан моделі.

Задача: визначити стан моделі з часом

$\frac{dN}{dt}$ – швидкість зміни чисельності карасів (без хижака число жертви зростає).

r – коефіцієнт, що залежить від умов життя карасів, їхньої природної смертності та народжуваності (питома швидкість популяційного зростання жертв)

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \qquad \frac{dN}{dt} = r \cdot N - a \cdot N \cdot C$$

Питома швидкість популяційного зростання жертв

Коефіцієнт вимирання жертв у результаті зустрічей із хижаком

Якщо карасів немає, то кількість щук зменшується (не має їжі), вони вимирають.

$\dfrac{dC}{dt}$ – швидкість зміни чисельності щук (якщо немає карасів), залежить лише від кількості щук у.

$$\frac{dC}{dt} = -q \cdot C$$

$$\frac{dC}{dt} = f \cdot N \cdot C - q \cdot C$$

Коефіцієнт смертності

Коефіцієнт розмноження $f = a \cdot \delta$

Коефіцієнт переробки хижаком біомаси жертви у власну масу

Модель взаємодії хижак-жертва Вольтерри-Лотки

Нульові ізокліни

Нульова ізокліна для жертви – безліч точок у просторі (N, C), для яких швидкість зростання чисельності жертви дорівнює нулю

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N - a \cdot N \cdot C$$

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

$$0 = r \cdot N - a \cdot N \cdot C$$

$$\hat{C} = \frac{r}{a}$$

Нульова ізокліна для жертви показує, скільки потрібно хижаків, щоб утримати популяцію жертв у рівновазі. Нульова ізокліна для жертви не залежить від кількості жертв!

Нульова ізокліна для хижака – безліч точок у просторі (N, C), для яких швидкість зростання чисельності хижака дорівнює нулю

$$\frac{dC}{dt} = f \cdot N \cdot C - q \cdot C$$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

$$0 = f \cdot N \cdot C - q \cdot C$$

$$\hat{N} = \frac{q}{f}$$

Нульова ізокліна для хижака показує, скільки потрібно жертв, щоб утримати популяцію хижаків у рівновазі. Нульова ізокліна для хижака не залежить від чисельності хижаків!

Чим більша швидкість зростання чисельності жертви r, тим більше потрібно хижаків, щоб утримати популяцію жертви в рівновазі

Чим більша смертність хижака q, тим більше потрібне жертв, щоб утримати популяцію хижака в рівновазі

$$\hat{C} = \frac{r}{a}$$

$$\hat{N} = \frac{q}{f}$$

Чим більший раціон хижака (коефіцієнт функціональної реакції a), тим менше потрібно хижаків, щоб утримати популяцію жертви в рівновазі

Чим більша народжуваність хижака при розрахунку на одну з'їдену жертву (f), тобто, чим вища ефективність трансформації енергії хижаком, тим менше потрібно жертв, щоб утримати популяцію хижака у рівновазі

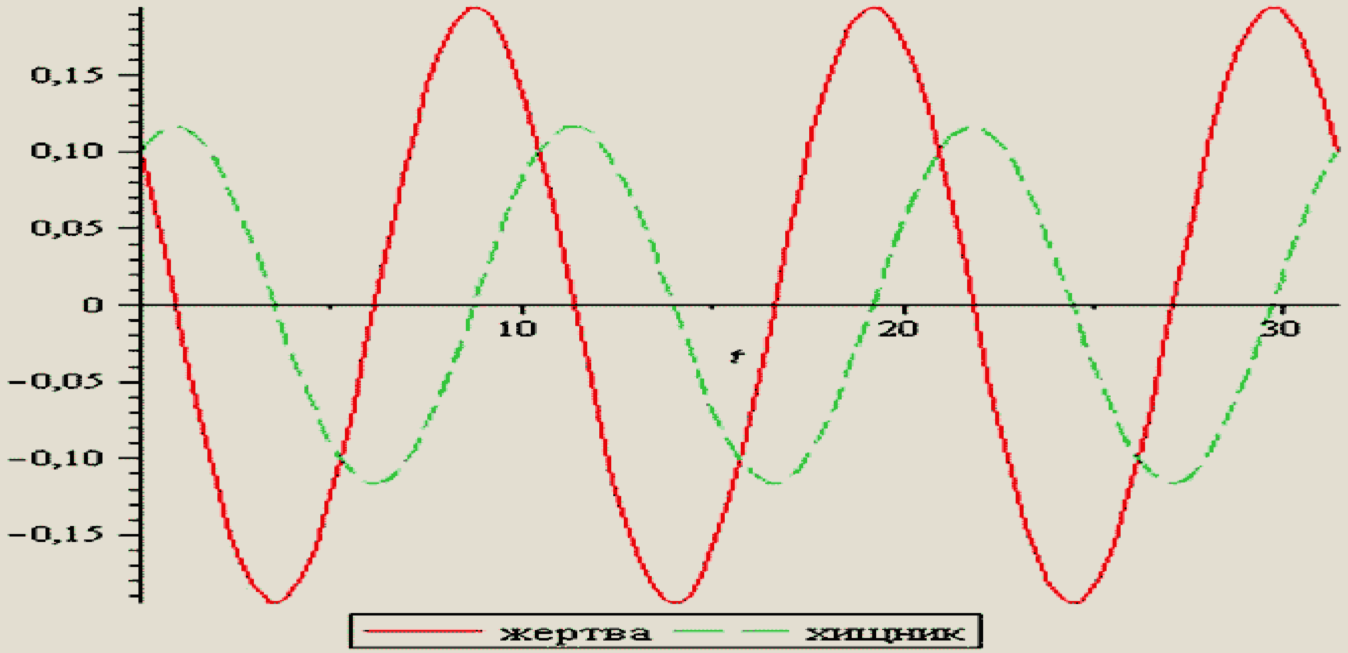
Система рівнянь для хижака та жертви

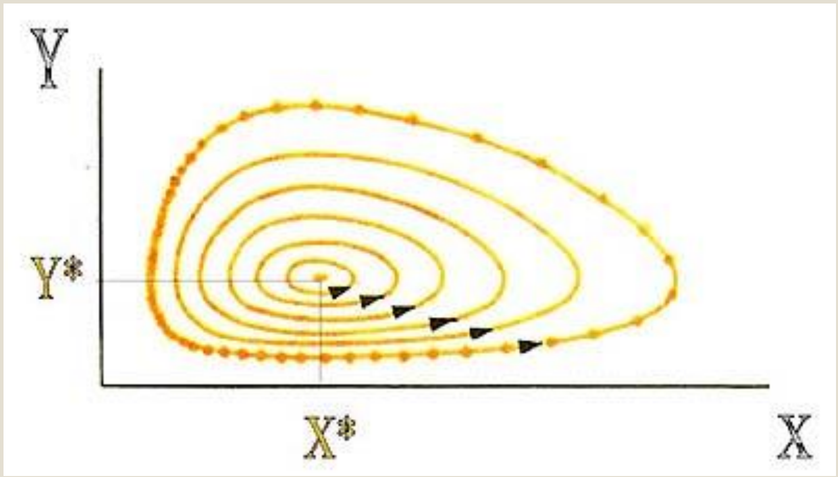
N – чисельність (щільність популяції) жертв

C – чисельність (щільність популяції) хижаків

$$
\begin{cases}
\dfrac{dN}{dt} = r \cdot N - a \cdot N \cdot C \\
\dfrac{dC}{dt} = f \cdot N \cdot C - q \cdot C
\end{cases}
$$

Графік залежності чисельність жертв від хижаків





Фазовий портрет системи «хижак (Y)-жертва(X)»

Система Лотки — Вольтерри описує гіпотетичну трьохстадійну реакцію:

$$\rightarrow A \xrightarrow{k_0} X \xrightarrow{k_1} \overleftarrow{Y} \xrightarrow{k_2} B$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_0 - k_1 xy = 0, \\ k_1 xy - k_2 y = 0. \end{cases}$$

Координати особливої точки

$$\bar{x} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \bar{y} = \frac{k_0}{k_2}.$$

Провести моделювання чисельності популяції для 3-го покоління при реалізації моделі необмеженого зростання, якщо початкова кількість чисельності популяції 250, а біотичний потенціал 0.056

Розв'язок

N_0 = 250, r=0.056

$$N(t) = N_o \cdot e^{r \cdot t}$$

N_2=250·exp(0.056·2)=279

N_3=279·exp(0.056·3)=330

Два види конюшини (M і N) конкурують за світло в період вегетації (модель міжвидової конкуренції за загальний ресурс) відповідно до моделі:

$$dN/dt = 0.6 \cdot N - 0.12 \cdot N^2 – 0.22 \cdot N \cdot M$$

$$dM/dt = 0.4 \cdot M – 0.07 \cdot M^2 -0.12 \cdot M \cdot N$$

Який вид отримає перевагу у розвитку?

Розв'язок

$$\frac{dN}{dt} = r_1 \cdot N \cdot \frac{K_1 - N - \alpha_1 M}{K_1} \qquad r_1 = 0.6, \frac{r_1}{K_1} = 0.12, \frac{r_1 \cdot \alpha_1}{K_1} = 0.22$$

$$\frac{dM}{dt} = r_2 \cdot M \cdot \frac{K_2 - M - \alpha_2 \cdot N}{K_2} \qquad r_2 = 0.4, \frac{r_2}{K_2} = 0.07, \frac{r_2 \cdot \alpha_2}{K_2} = 0.12$$

r_1=0.6, K_1=5, α_1=9.17

r_2=0.4, K_2=5.71, α_2=1.71

$$\alpha_1 = 9.17 > 0.88 = \frac{K_1}{K_2}$$

$$\alpha_2 = 1.71 > 1.14 = \frac{K_2}{K_1}$$

$r_1 > r_2$ (0.6 >0.4)

N - вид

Провести моделювання чисельності популяцій М і N при реалізації міжвидової конкуренції для наступних умов:

1) $r_N = r_M = 2$, $N=M=100$, $K_N = K_M = 250$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.35$

$$\frac{dN}{dt} = r_1 \cdot N \cdot \frac{K_1 - N - \alpha_1 M}{K_1}$$

$$\frac{dM}{dt} = r_2 \cdot M \cdot \frac{K_2 - M - \alpha_2 \cdot N}{K_2}$$

$$\frac{dN}{dt} = r_N \cdot N \cdot \frac{K_N - N - \alpha_1 \cdot M}{K_N} \rightarrow N_1 = 2 \cdot 100 \cdot \frac{250 - 100 - 0.5 \cdot 100}{250} + 100 = 180$$

$$\frac{dM}{dt} = r_M \cdot M \cdot \frac{K_M - M - \alpha_2 \cdot N}{K_M} \rightarrow M_1 = 2 \cdot 100 \cdot \frac{250 - 100 - 0.35 \cdot 100}{250} + 100 = 192$$

2) $r_N = r_M = 2$, $N=100$, $M=85$, $K_N = K_M = 250$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.35$

$$\frac{dN}{dt} = r_N \cdot N \cdot \frac{K_N - N - \alpha_1 \cdot M}{K_N} \rightarrow N_1 = 2 \cdot 100 \cdot \frac{250 - 100 - 0.5 \cdot 85}{250} + 100 = 186$$

$$\frac{dM}{dt} = r_M \cdot M \cdot \frac{K_M - M - \alpha_2 \cdot N}{K_M} \rightarrow M_1 = 2 \cdot 85 \cdot \frac{250 - 85 - 0.35 \cdot 100}{250} + 85 = 173$$

3) $r_N = r_M = 2$, $N=100$, $M=85$, $K_N = K_M = 250$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.5$

$$\frac{dN}{dt} = r_N \cdot N \cdot \frac{K_N - N - \alpha_1 \cdot M}{K_N} \rightarrow N_1 = 2 \cdot 100 \cdot \frac{250 - 100 - 0.5 \cdot 85}{250} + 100 = 186$$

$$\frac{dM}{dt} = r_M \cdot M \cdot \frac{K_M - M - \alpha_2 \cdot N}{K_M} \rightarrow M_1 = 2 \cdot 85 \cdot \frac{250 - 85 - 0.5 \cdot 100}{250} + 85 = 163$$

Провести моделювання динаміки чисельності популяцій в системі хижак – жертва для наступних параметрів моделі

1) *N_0=110, C_0=7, r=3, q=2, f=0.03 , α=0.1*

Розв'язок

$$N_1 = r \cdot N_0 - a \cdot N_0 \cdot C + N_0 \qquad C_1 = f \cdot N \cdot C_0 - q \cdot C + C_0$$

N_1= 3·110 - 0.1·7·110 + 110 = 363 $\qquad$ C_1= 0.03·7·110 - 2·7 + 7 = 16